Problemas de estimación en transmisión digital: demostraciones por métodos elementales

José Ignacio Ronda - GTI-SSR-ETSIT-UPM - jir@gti.ssr.upm.es

2 de diciembre de 2015

Índice

1. Introducción

En el diseño de receptores de sistemas de transmisión digital es necesario resolver ciertos problemas de estimación de variables aleatorias o procesos aleatorios a partir de observaciones de los mismos afectadas por distorsión y ruido. En este breve documento abordamos estos problemas de estimación mediante métodos matemáticos absolutamente elementales.

La observación básica es que si sabemos encontrar el mínimo de una función cuadrática real de variable compleja, podemos resolver estos problemas de forma sencilla y rigurosa. En particular evitamos el uso del principio de ortogonalidad, que requeriría que el lector estuviera familiarizado con el manejo de un espacio de variables aleatorias como conjunto con producto interno.

Los comentarios (jir@gti.ssr.upm.es) son bienvenidos.

2. Funciones cuadráticas de vectores y matrices

2.1. Funciones cuadráticas de un vector complejo

En diversas ocasiones necesitaremos hallar el vector complejo $\mathbf{z} = \mathbf{z}_{opt}$ que minimiza la función real de una variable compleja

$$F(\mathbf{z}) = \|\mathbf{Az}\|^2 - 2\Re\langle \mathbf{b}, \mathbf{z}\rangle + c \tag{1}$$

donde suponemos que la matriz $\mathbf{A}$ es regular. Veamos que se puede poner de la forma

$$F(\mathbf{z}) = \|\mathbf{Az} - \mathbf{p}\|^2 + q$$

de manera que

$$\mathbf{z}_{opt} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p},\ F(\mathbf{z}_{opt}) = q.$$

En efecto, desarrollando la segunda expresión

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}) &= \|\mathbf{Az} - \mathbf{p}\|^2 + q = \left(\mathbf{z}^H\mathbf{A}^H - \mathbf{p}^H\right)(\mathbf{Az} - \mathbf{p}) + q \\ &= \mathbf{z}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Az} - 2\Re \underbrace{\mathbf{p}^H\mathbf{Az}}_{=\langle \mathbf{A}^H\mathbf{p}, \mathbf{z}\rangle} + \|\mathbf{p}\|^2 + q, \end{aligned}$$

vemos que es equivalente a

$$F(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^H\mathbf{A}^H\mathbf{Az} - 2\Re\langle \mathbf{b}, \mathbf{z}\rangle + c$$

si damos a los parámetros $\mathbf{p}$ y q los valores que obtenemos de igualar coeficienes y despejar:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{A}^H\mathbf{p}, c = \|\mathbf{p}\|^2 + q \\ \Rightarrow \mathbf{p} &= \mathbf{A}^{-H}\mathbf{b}, q = c - \|\mathbf{p}\|^2. \end{aligned}$$

Por tanto la función

$$F(\mathbf{z}) = \|\mathbf{Az}\|^2 - 2\Re\langle \mathbf{b}, \mathbf{z}\rangle + c$$

tiene su mínimo en

$$\mathbf{z}_{opt} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-H} = \left(\mathbf{A}^H\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{b}, \tag{2}$$

y el valor correspondiente es

$$F(\mathbf{z}_{opt}) = q = c - \|\mathbf{p}\|^2 = c - \left\|\mathbf{A}^{-H}\mathbf{b}\right\|^2.$$

Como caso particular, en dimensión uno tenemos

$$F(z) = a^2|z|^2 - 2\Re(b^*z) + c$$

con lo que el óptimo y el valor asociado valen

$$\begin{aligned} z_{opt} &= \frac{b}{a^2}, \\ F(z_{opt}) &= c - \frac{|b|^2}{a^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

El sencillo resultado de este apartado nos permite ya abordar los problemas de la estimación lineal de una variable aleatoria escalar y de un proceso estocástico que desarrollamos en los apartados 3.1 y 3.2 y que tienen aplicaciones inmediatas en igualación de canal y detección en OFDM que explicamos en 4.1 y 4.2.

2.2. Funciones cuadráticas de una matriz

Vamos a extender el resultado de la sección anterior a funciones en las que la variable sea, en lugar de un vector, una matriz compleja. Esto es necesario para abordar el problema de la estimación lineal de un vector aleatorio afectado por distorsión lineal y ruido que abordamos en el apartado 3.3 y en el que nos basaremos para resolver los problemas de la detección multiusuario en CDMA y de la multiplexación espacial en sistemas MIMO, que estudiamos en los apartados 4.3 y 4.4.

Para el lector apresurado indicamos que esta sección se resume en que la matriz que minimiza la función (6) está dada por (7). Con esto y un vistazo a las fórmulas (4) y (5) ya puede pasar a la sección siguiente.

Para generalizar nuestro problema hacemos uso de conceptos análogos a los de producto escalar y norma de vectores. El producto escalar entre dos matrices complejas de las mismas dimensiones $\mathbf{X} = (x_{ij})$, $\mathbf{Y} = (y_{ij})$, es natural definirlo como

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \sum_{i,j} x_{ij} y_{ij}^*. \tag{4}$$

Recordando que la traza $\mathrm{tr}(\mathbf{Z})$ de una matriz cuadrada $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ es la suma de los elementos de su diagonal principal, es decir,

$$\mathrm{tr}(\mathbf{Z}) = \sum_i z_{ii},$$

podemos escribir el producto escalar de forma más compacta como

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathrm{tr}\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}^H\right)$$

(como $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ tienen las mismas dimensiones, el producto $\mathbf{X}\mathbf{Y}^H$ se puede realizar y da como resultado una matriz cuadrada). La norma matricial análoga a la norma euclídea se denomina *norma de Frobenius* y se define como

$$\|\mathbf{Z}\|_F^2 = \sum_{ij} |z_{ij}|^2 = \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle = \mathrm{tr}\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H\right). \tag{5}$$

También es útil recordar que toda matriz cuadrada se puede expresar de forma única como la suma de una matriz hermítica y una matriz antihermítica, y la primera está dada por

$$\mathrm{Her}\left(\mathbf{Z}\right) = \frac{\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^H}{2}.$$

Una sencilla relación útil relacionada con esta descomposición es

$$\Re\,\mathrm{tr}(\mathbf{Z}) = \sum_i \frac{z_{ii} + z_{ii}^*}{2} = \mathrm{tr}\left[\mathrm{Her}\left(\mathbf{Z}\right)\right],$$

de la que se deduce que

$$\Re\left\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\right\rangle = \Re\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}^H\right) = \mathrm{tr}\left[\mathrm{Her}\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}^H\right)\right] = \mathrm{tr}\left[\mathrm{Her}\left(\mathbf{Y}\mathbf{X}^H\right)\right]$$

Con este preámbulo estamos en condiciones de definir una función matricial análoga a (1) como

$$\begin{aligned} F(\mathbf{W}) &= \left\|\mathbf{A}\mathbf{W}\right\|_F^2 - 2\Re\left\langle \mathbf{B}, \mathbf{W}\right\rangle + \mathrm{tr}\ \mathbf{C} \\ &= \mathrm{tr}\left[\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H - 2\mathrm{Her}\left(\mathbf{W}\mathbf{B}^H\right) + \mathbf{C}\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

donde suponemos que $\mathbf{A}$ es regular. Esta función se puede expresar de la forma

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{P}\right\|_F^2 + \mathrm{tr}\left[\mathbf{Q}\right] &= \mathrm{tr}\left[\left(\mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{P}\right)\left(\mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{P}\right)^H + \mathbf{Q}\right] \\ &= \mathrm{tr}\left[\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{A}^H\mathbf{W}^H - 2\mathrm{Her}\left(\mathbf{W}\mathbf{A}\mathbf{P}^H\right) + \mathbf{P}\mathbf{P}^H + \mathbf{Q}\right]. \end{aligned}$$

En efecto, identificando términos tenemos

$$\mathbf{B}^H = \mathbf{A}\mathbf{P}^H,\ \mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{P}^H + \mathbf{Q}.$$

Por tanto podemos tomar

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^H\right)^H = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-H}.$$

El $\mathbf{W}$ que minimiza la función es el que anula $\left\|\mathbf{W}\mathbf{A} - \mathbf{P}\right\|_F^2$:

$$\mathbf{W}_{opt}\mathbf{A} = \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{W}_{opt} = \mathbf{P}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-H}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^H\right)^{-1}. \tag{7}$$

El valor de la función en el óptimo se calcula utilizando la propiedad de la traza $\mathrm{tr}\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{Y}\mathbf{X}\right)$ y vale

$$F(\mathbf{W}_{opt}) = \mathrm{tr}\ \mathbf{C} - \mathrm{tr}\ \left[\mathbf{B}^H\mathbf{B}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^H\right)^{-1}\right].$$

3. Estimación lineal de señales

3.1. Estimación de una VA compleja

Recordamos que una variable aleatoria (VA) compleja no es sino un par de variables aleatorias reales que identificamos con las partes real e imaginaria de la VA compleja. Podríamos decir que es otra manera de ver una VA bidimensional. Es inmediato comprobar que, si U y V son VA complejas independientes de media nula, $E\left[|U+V|^2\right] = E\left[|U|^2\right] + E\left[|V|^2\right]$.

Dadas X, N complejas independientes de media nula con varianzas

$$E\left[|X|^2\right] = \sigma_X^2,\ E\left[|N|^2\right] = \sigma_N^2,$$

tenemos la observación de X

$$Y = \alpha X + N$$

con α conocido y queremos obtener una estimación lineal óptima de X a partir de Y

$$\hat{X} = \beta Y$$

suponiendo que la caracterización estadística de X y N es también conocida. Queremos por tanto minimizar

$$\begin{aligned}
F(\beta) &= E\left[\left|X - \hat{X}\right|^2\right] = E\left[\left|X - \beta\left(\alpha X + N\right)\right|^2\right] = E\left[\left|\left(\beta\alpha - 1\right)X - \beta N\right|^2\right] \\
&= E\left[\left|\left(\beta\alpha - 1\right)X\right|^2\right] + E\left[|\beta N|^2\right] = |\beta\alpha - 1|^2\, E\left[|X|^2\right] + |\beta|^2\, E\left[|N|^2\right] \\
&= |\beta\alpha - 1|^2\, \sigma_X^2 + |\beta|^2\, \sigma_N^2 \\
&= \underbrace{\left(\sigma_X^2|\alpha|^2 + \sigma_N^2\right)}_{a^2} |\beta|^2 - 2\Re(\underbrace{\sigma_X^2\alpha}_{b^*}\,\beta) + \underbrace{\sigma_X^2}_{c}.
\end{aligned}$$

Se trata por tanto de nuevo de la minimización de una función cudrática real de variable compleja. El valor β óptimo es el dado por la fórmula (3),

$$\beta = \frac{b}{a^2} = \frac{\sigma_X^2\alpha^*}{\sigma_X^2|\alpha|^2 + \sigma_N^2} = \frac{\alpha^*}{|\alpha|^2 + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_X^2}} \tag{8}$$

y la varianza del error mínimo es

$$F_{min} = c - \frac{|b|^2}{a^2} = \sigma_X^2 - \frac{|\sigma_X^2\alpha|^2}{\sigma_X^2|\alpha|^2 + \sigma_N^2} = \frac{\sigma_X^2\sigma_N^2}{\sigma_X^2|\alpha|^2 + \sigma_N^2}.$$

Obsérvese que, como era de esperar, para $\sigma_N^2 = 0$ tenemos $\beta = 1/\alpha$.

3.2. Estimación de un proceso aleatorio

Suponemos que observamos el proceso aleatorio estacionario $X[n]$ a partir de la versión filtrada con ruido

$$Y[n] = X[n] * h[n] + N[n].$$

Queremos obtener una estimación lineal invariante lo mejor posible $\hat{X}[n]$ del proceso $X[n]$ a partir de $Y[n]$, es decir, una estimación de la forma

$$\hat{X}[n] = w[n] * Y[n].$$

El error de esta estimación es

$$e[n] = \hat{X}[n] - X[n] = (w[n] * h[n] - \delta[n]) * x[n] + w[n] * N[n]$$

y el filtro $w[n]$ óptimo es el que minimiza

$$\sigma_e^2 = E\left[|e[n]|^2\right].$$

Para resolver el problema vamos a hacer uso de densidades espectrales de potencia, así que repasamos primero lo que necesitamos sobre este concepto. Dado un proceso estocástico estacionario $z[n]$, se define su *función de autocorrelación como*

$$R_z[m] = E\left[x[n+m]x^*[n]\right]$$

y su *densidad espectral de potencia (DEP)* la transformada de Fourier de la función de la autocorrelación. Haremos uso de dos propiedades de la densidad espectral de potencia:

1. Si $h[n]$ es un filtro estable, $u[n] = z[n] * h[n]$ es un proceso estocástico estacionario con DEP $S_u(\omega) = S_z(\omega)\,|H(\omega)|^2$.

2. Si $u[n]$ y $v[n]$ son procesos independientes y $z[n] = u[n] + v[n]$, entonces $S_z(\omega) = S_u(\omega) + S_v(\omega)$.

Volvemos a nuestro problema de minimización. Por la fórmula de inversión de la transformada de Fourier de una secuencia,

$$\sigma_e^2 = E\left[|e[n]|^2\right] = E\left[e[n+0]e[n]^*\right] = R_e[0] = \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega)d\omega.$$

Como $X[n]$ y $N[n]$ son independientes, tenemos

$$\begin{aligned} S_e &= S_X|WH-1|^2 + S_N|W|^2 \\ &= \underbrace{\left(S_X|H|^2 + S_N\right)}_{a^2}|W|^2 - 2\Re\left(\underbrace{S_x H}_{b^*} W\right) + \underbrace{S_X}_{c}, \end{aligned}$$

que es una ecuación cuadrática para cada ω, que sabemos minimizar, con el resultado (fórmula (3))

$$W_{opt}(\omega) = \frac{b}{a^2} = \frac{S_X(\omega)H^*(\omega)}{S_X(\omega)|H(\omega)|^2 + S_N(\omega)} \tag{9}$$

que da lugar a una DEP del error

$$S_{emin} = c - \frac{|b|^2}{a^2} = S_X(\omega) - \frac{|S_X(\omega)H^*(\omega)|^2}{S_X(\omega)|H(\omega)|^2 + S_N(\omega)} = \frac{S_X(\omega)S_N(\omega)}{S_X(\omega)|H(\omega)|^2 + S_N(\omega)}.$$

Es destacable que con el filtro calculado no sólo minimizamos la varianza del error σ_e^2, sino su densidad espectral de potencia $S_e(\omega)$ para todo ω, es decir, estamos minimizando la potencia del error en cualquier banda de frecuencia.

3.3. Estimación de un vector aleatorio

Dados los vectores aleatorios complejos de media nula $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, con matrices de covarianzas

$$\Sigma_{XY} = E\left[\mathbf{X}\mathbf{Y}^H\right], \; \Sigma_X = E\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^H\right] \; \Sigma_Y = E\left[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\right]$$

queremos hallar la mejor estimación lineal de $\mathbf{X}$ a partir de $\mathbf{Y}$, es decir, el vector aleatorio de la forma

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{W}\mathbf{Y}$$

que minimiza la *varianza total* del error $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X} = (e_i)$, es decir,

$$\sigma_T^2(\mathbf{E}) = \sum_i E\left[|e_i|^2\right] = \mathrm{tr}\Sigma_E.$$

Para ello hallamos esta matriz de covarianzas. Utilizando $\Sigma_{YX} = \Sigma_{XY}^H$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Sigma_E &= E\left[\mathbf{E}\mathbf{E}^H\right] = E\left[(\mathbf{W}\mathbf{Y} - \mathbf{X})\left(\mathbf{Y}^H\mathbf{W}^H - \mathbf{X}^H\right)\right] \\
&= E\left[\mathbf{W}\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\mathbf{W}^H\right] - E\left[\mathbf{X}\mathbf{Y}^H\mathbf{W}^H\right] - E\left[\mathbf{W}\mathbf{Y}\mathbf{X}^H\right] + E\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^H\right] \\
&= \mathbf{W}E\left[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\right]\mathbf{W}^H - E\left[\mathbf{X}\mathbf{Y}^H\right]\mathbf{W}^H - \mathbf{W}E\left[\mathbf{Y}\mathbf{X}^H\right] + E\left[\mathbf{X}\mathbf{X}^H\right] \\
&= \mathbf{W}\Sigma_Y\mathbf{W}^H - \Sigma_{XY}\mathbf{W}^H - \mathbf{W}\Sigma_{YX} + \Sigma_X \\
&= \mathbf{W}\Sigma_Y\mathbf{W}^H - 2\mathrm{Her}\left(\mathbf{W}\Sigma_{YX}\right) + \Sigma_X.
\end{aligned}$$

La función

$$F(\mathbf{W}) = \mathrm{tr}\Sigma_E = \mathrm{tr}\left[\mathbf{W}\Sigma_Y\mathbf{W}^H - 2\mathrm{Her}\left(\mathbf{W}\Sigma_{YX}\right) + \Sigma_X\right]$$

es de la forma (6), con

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \Sigma_Y, \; \mathbf{B} = \Sigma_{YX}^H = \Sigma_{XY}, \; \mathbf{C} = \Sigma_X.$$

Por tanto el mínimo se obtiene, de acuerdo con la fórmula (7), para

$$\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{B}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^H\right)^{-1} = \Sigma_{XY}\Sigma_Y^{-1}.$$

En el caso particular de que la variable observada $\mathbf{Y}$ esté relacionada con $\mathbf{X}$ de la forma

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{N}$$

donde $\mathbf{X}$ y $\mathbf{N}$ son independientes, tenemos

$$\Sigma_{XY} = E\left[\mathbf{X}\mathbf{Y}^H\right] = E\left[\mathbf{X}(\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{N})^H\right] = \Sigma_X \mathbf{H}^H,$$
$$\Sigma_Y = E\left[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H\right] = E\left[(\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{N})(\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{N})^H\right] = \mathbf{H}\Sigma_X \mathbf{H}^H + \Sigma_N,$$

luego

$$\mathbf{W}_{opt} = \Sigma_{XY}\Sigma_Y^{-1} = \Sigma_X \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H}\Sigma_X \mathbf{H}^H + \Sigma_N\right)^{-1} \tag{10}$$

y la varianza total correspondiente resulta ser

$$F(\mathbf{W}_{opt}) = \mathrm{tr}\ \Sigma_X - \mathrm{tr}\ \left[\mathbf{H}\Sigma_X^2 \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H}\Sigma_X \mathbf{H}^H + \Sigma_N\right)^{-1}\right].$$

4. Aplicaciones

4.1. Igualación de canal con interferencia entre símbolos

Consideramos un sistema de comunicaciones digitales en el que se transmite una secuencia de amplitudes complejas $A[n]$, independientes de media nula y varianza σ_A^2 y se recibe

$$q[n] = A[n] * p[n] + \nu[n]$$

donde $p[n]$ es una señal conocida y $\nu[n]$ es ruido blanco gaussiano de varianza conocida σ_ν^2. Queremos hallar el filtro $w[n]$ que genera una mejor estimación de $A[n]$ a partir de $q[n]$, es decir, que minimiza

$$E\left[|A[n] - w[n] * q[n]|^2\right].$$

Este es el problema abordado en 3.2. El filtro buscado está dado por tanto por la fórmula (9) y vale

$$W_{opt} = \frac{S_A(\omega)P^*(\omega)}{S_A(\omega)|P(\omega)|^2 + S_\nu(\omega)} = \frac{P^*(\omega)}{|P(\omega)|^2 + \frac{S_\nu(\omega)}{S_A(\omega)}} = \frac{P^*(\omega)}{|P(\omega)|^2 + \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_A^2}}.$$

4.2. Estimación de la señal en OFDM

En un sistema OFDM con canal discreto equivalente $d[n]$ y prefijo cíclico de suficiente longitud, cuando se transmite en un periodo de símbolo el vector de amplitudes complejas $\mathbf{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_{N-1})$ se recibe el vector $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_{N-1})$, dado por

$$q_k = \sqrt{N} D[k] A_k + n_k,$$

donde $D[k]$ es la DFT de $d[n]$ y n_k es ruido gaussiano de componentes independientes con partes real e imaginaria independientes de varianza conocida σ_n^2. Suponiendo que el canal es conocido, y que las amplitudes A_k son independientes, el problema de hallar la mejor estimación lineal de los A_k a partir de los q_k es un problema independiente para cada cada componente del vector.

Se trata por tanto del problema que hemos abordado en 3.1, de forma que la solución se calcula con la fórmula (8):

$$\hat{A}_k = G_k q_k,\ G_k = \frac{D[k]^*}{|D[k]|^2 + \frac{\sigma_N^2}{\sigma_X^2}}.$$

4.3. Detección multiusuario en CDMA

Consideramos un sistema de comunicaciones con K transmisores cuyas señales llegan a un receptor. Cada transmisor genera, en cada periodo de símbolo, un vector $A_k \mathbf{x}_k$ que llega al receptor convertido por efecto del canal en otro vector $A_k \tilde{\mathbf{x}}_k$, de forma que se recibe

$$\mathbf{v} = \sum_k A_k \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{n}.$$

Suponemos que los $\tilde{\mathbf{x}}_k$ son conocidos, que $\mathbf{n}$ es de muestras independientes de varianza conocida σ_n^2 y que la interferencia entre símbolos es despreciable. El problema consiste en estimar linealmente $\mathbf{A} = (A_1, A_1, \dots, A_K)^\top$ a partir de

$$\mathbf{v} = \underbrace{\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{x}}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{x}}_K\end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{X}}} \mathbf{A} + \mathbf{n},$$

aunque en algunos sistemas se prefiere partir de

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{X}}^H \mathbf{v} = \underbrace{\tilde{\mathbf{X}}^H \tilde{\mathbf{X}}}_{\tilde{\mathbf{R}}} \mathbf{A} + \underbrace{\tilde{\mathbf{X}}^H \mathbf{n}}_{\mathbf{z}}.$$

En ambos casos se trata de casos particulares del problema de estimación de un vector aleatorio que hemos resuelto en 3.3. Aplicando al último caso la fórmula (10) obtenemos

$$\begin{aligned}
\Sigma_A &= \sigma_A^2 \mathbf{I}, \\
\Sigma_z &= E\left[\mathbf{z}\mathbf{z}^H\right] = E\left[\tilde{\mathbf{X}}^H \mathbf{n}\mathbf{n}^H \tilde{\mathbf{X}}\right] = \tilde{\mathbf{X}}^H E\left[\mathbf{n}\mathbf{n}^H\right] \tilde{\mathbf{X}} \\
&= \tilde{\mathbf{X}}^H \Sigma_n \tilde{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{X}}^H \left(\sigma_n^2 \mathbf{I}\right) \tilde{\mathbf{X}} = \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{R}}, \\
\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{G}\tilde{\mathbf{v}}, \\
\mathbf{G} &= \sigma_A^2 \tilde{\mathbf{R}}^H \left(\sigma_A^2 \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{R}}^H + \sigma_n^2 \tilde{\mathbf{R}}\right)^{-1} = \tilde{\mathbf{R}}^H \left(\tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{R}}^H + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_A^2}\tilde{\mathbf{R}}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

4.4. Multiplexación espacial en sistemas MIMO

Nuestro sistema consta ahora de un transmisor y de un receptor, provistos ambos de varias antenas. El transmisor genera en el periodo de símbolo considerado una amplitud

x_i por su antena j, de forma que la antena i del receptor detecta

$$y_i = \sum_j h_{ij} x_j + n_j$$

donde suponemos que los h_{ij} son conocidos por el receptor y que los n_j son muestras de ruido gaussiano de componentes independientes de varianza σ_n^2. En forma vectorial tenemos

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n},$$

donde $\mathbf{H} = (h_{ij})$, $\mathbf{x} = (x_i)$, $\mathbf{y} = (y_i)$, $\mathbf{n} = (n_i)$.

Este sistema se denomina *multiplexación espacial* porque se puede utilizar para transmitir varios flujos de datos en paralelo entre el transmisor y el receptor. El problema de estimar linealmente el vector transmitido $\mathbf{x}$ a partir del detectado $\mathbf{y}$ es de nuevo el problema tratado en 3.3. Suponiendo que los x_i son independientes de varianza σ_x^2 la estimación que buscamos se obtiene de nuevo con la fórmula (10):

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{G}\mathbf{y}, \\
\mathbf{G} &= \Sigma_x \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H}\Sigma_x\mathbf{H}^H + \Sigma_n\right)^{-1} \\
&= \sigma_x^2 \mathbf{H}^H \left(\sigma_x^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2 I\right)^{-1} \\
&= \mathbf{H}^H \left(\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_x^2} I\right)^{-1}.
\end{aligned}$$